

APUNTES SOBRE LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS EN LA FORMA-
CIÓN ACADÉMICA DEL GEÓGRAFO

Javier Martín Vide
(Universidad de Barcelona)

El presente trabajo, que constituye uno de los paneles de la mesa redonda sobre "Las técnicas de cuantificación en la enseñanza curricular de la Geografía", es un conjunto de apuntes o notas acerca de la necesidad y puesta en práctica de la enseñanza de las matemáticas en la formación del geógrafo, fruto de la reflexión desde la doble vertiente personal de profesor de Geografía y matemático. No se pretende mostrar aquí de forma exhaustiva la compleja y diversa problemática que subyace en el título del panel, porque tal labor requeriría probablemente un trabajo profundo y previo de investigación epistemológica y conceptual sobre nuestra disciplina—la Geografía—, que, caso de haber sido afrontado y resuelto con éxito, nos retrotraería a problemas fundamentales, algunos ya largamente debatidos, aunque no siempre solucionados, que, creo, quedan fuera de los límites de la mesa redonda. Por otra parte, tampoco—y no es una mera excusación—debe un panel o texto introductorio o mantenedor de una mesa redonda ser un producto exhaustivo y conclusivo. Precisamente, es de esperar que quede ampliamente superado tras su puesta a debate o tras la reflexión colectiva que genere. Como punto de partida, pues, a tal debate, y con esa esperanza, he elaborado los siguientes apuntes, que pretenden estar trabados por un nexo claro y continuo.

1. INTRODUCCIÓN: ALGUNAS CONSIDERACIONES SOBRE LA NECESIDAD DEL USO DE LAS MATEMÁTICAS EN GEOGRAFÍA

En primer lugar, si no como punto de partida, al menos como declaración de intenciones, siguiendo a varios autores, entre ellos a BEGUIN, H. (1984) en un reciente trabajo, nos

parece que el adjetivo "cuantitativa" que califica a este II Coloquio o el sustantivo "cuantificación", presente en el título de la mesa redonda y en el tema c), son fácilmente sustituibles por expresiones como "análisis geográfico matemático", "Geografía teorética" o "teórica", etc., porque la llamada Geografía cuantitativa—título consagrado y que pone énfasis en los especiales métodos y técnicas de análisis del positivismo frente al historicismo geográficos— es una manera de analizar los fenómenos geográficos por medio de la Matemática en sentido amplio, o, en pos de esta generalidad, de las matemáticas. Precisamente, como luego se verá, las mismas matemáticas han sido vinculadas con la cuantificación o la medición cuando muchas de sus partes no tienen nada que ver con ello.

El análisis estadístico al uso o convencional, que ha servido de soporte a la "revolución cuantitativa" en Geografía, dotó a ésta de un gran poder analítico y de explotación de los datos de partida y, en general, de un mayor rigor y precisión científicos. Pero si, como parece, se tiende, y se impone, ya desde sus inicios, al desarrollo de una geografía teórica, o de una teoría geográfica o reflexión teórica en Geografía, hemos de recurrir al apoyo de las matemáticas. El cuerpo teórico que necesita la Geografía puede estar en algunos modelos apriorísticos matemáticos, "listos para su uso" —en expresión de HARVEY, D. (1969)—. Al tiempo, el mismo lenguaje matemático nos aportará el rigor y la concisión que requiere tal reflexión teórica. Nótese que el análisis estadístico convencional o al uso es un útil poderoso en la explicación geográfica, que permite analizar datos y contrastar hipótesis, pero no formular un cuerpo teórico (excluimos los modelos estocásticos). La construcción de una teoría geográfica rigurosa compuesta de axiomas y de deducciones, teoremas y corolarios, requiere el análisis matemático puro, que con sus estructuras lógicas constituye

un sistema lingüístico formal, al menos desde la primera mitad del siglo XX. En ese momento quedó reducido a cero o relegado a metamatemática el pequeño "residuo intuitivo" (QUEYSANNE, M., 1964) que aún existía en la etapa anterior —la de las matemáticas axiomáticas—, hablándose desde entonces de etapa de las matemáticas formalizadas. Con razón se ha dicho que las matemáticas son el lenguaje, el auténtico lenguaje de la ciencia.

A la vista de lo anterior, podríamos plantear los antinomios siguientes:

Estadística convencional	/	Matemáticas
análisis estadístico	/	análisis matemático
útil analítico	/	sistema lingüístico
tratamiento y análisis de	/	formulación de leyes y mo-
datos		delización
cuantitativismo	/	matematización
técnicas y métodos cuanti-	/	teoría geográfica
tativos en Geografía		
Geografía "cuantitativa"	/	Geografía teórica o teoré-
		tica

De donde, en el conocido esquema con que JOHNSTON, R.J. (1978) resume el conjunto de procesos del método científico positivista, la parte superior del mismo (axiomas-deducciones-modelo-hipótesis) compete a las matemáticas, mientras que la inferior (datos-evaluación de hipótesis) es objeto de la Estadística convencional.

Pero de todo lo anterior no debe inferirse que Estadística y Matemática constituyan disciplinas separadas o antinómicas, sino que, por el contrario, la Estadística puede suponerse inmersa en las matemáticas, al igual que la Geometría, la Aritmética u otras materias. Al fin y al cabo es posible fundamentar axiomáticamente y desarrollar formalmente el concepto de probabilidad, la geometría proyectiva o los números naturales, por poner un ejemplo de cada una de las materias citadas. La Estadística, desde la perspectiva

del matemático, es una parte de las matemáticas. En los mismos planes de estudios de esta licenciatura hay alguna asignatura con el título de Estadística(o Estadística y Cálculo de probabilidades, etc.). Y esta asignatura es presentada con un rigor teórico y formal comparable a otras.

Pero si es la Estadística o, con más precisión, la Estadística que hemos denominado convencional, al uso o práctica la que dota al geógrafo de un potente y objetivo análisis para tratar un gran conjunto de datos y para verificar con ellos las hipótesis planteadas, son, en cambio, otras partes de las matemáticas las que nos van a suministrar un ingente y acabado cuerpo teórico, del que el geógrafo cuantitativo puede y debe servirse en la construcción de la teoría geográfica. Así, por ejemplo, en la teoría de conjuntos—una parte de las matemáticas cuyos fundamentos pueden adquirirse sin bagaje matemático previo— puede estar, según ATKIN, R. H.(1974), la clave del estudio científico de actividades humanas. Para este autor lo fundamental se centra en los procesos de identificación de conjuntos y en el conocimiento de las propiedades estructurales de sus relaciones. O, la misma teoría de conjuntos es introducida con precisión y con numerosos ejemplos geográficos en GATRELL, A.(1983), tras haber adoptado que los espacios son relaciones sobre conjuntos de objetos y que la distancia es un tipo de relación. La teoría de grafos es, por ejemplo, otra candidata ideal para el desarrollo de algunos temas de la Geografía teórica (TINKLER, K. J., 1979). En éstos y en otros muchos casos podremos aprovechar las deducciones y los teoremas demostrados de las matemáticas para obtener conocimiento sobre nuestros problemas geográficos. Ello, ciertamente, exigirá—punto fundamental y delicado— una adecuada y correcta identificación o proyección entre los objetos matemáticos y los geográficos. Se tratará de proyectar el problema geográfico empírico a alguna teoría o modelo matemático, cuyos teoremas

y conclusiones se convertirán en sus soluciones, una vez "deshecha" la proyección. De esa manera habremos interpretado el lenguaje o la teoría matemática utilizada. Es decir, en esa teoría matemática puramente formal, o sintaxis, habremos dado un significado a sus términos, o semántica. Pero lo importante para nosotros será haber resuelto el problema geográfico.

2. LAS MATEMÁTICAS EN LAS OBRAS GEOGRÁFICAS RECIENTES

Fruto y reflejo de lo dicho en el apartado anterior, del creciente interés por el desarrollo de una teoría geográfica rigurosa, aunque en algún caso —y no descalificable— simple recurso a un lenguaje pulcro y exacto, es el empleo cada vez más profuso de las matemáticas en las obras geográficas. Esto es indiscutible, por más que los detractores de la Geografía cuantitativa, que lo son siempre del empleo de las matemáticas en Geografía —véase que ellos suelen reconocer su vinculación aunque sea fruto de la errónea asimilación entre las matemáticas y la cuantificación— se esfuercen en demostrar que tal uso está en decadencia. Cualquiera de nosotros con acceso a una biblioteca especializada en Geografía, sea exclusivamente o no —pongamos la biblioteca de consulta de nuestros departamentos universitarios—, puede comprobar tal aserto en las obras más recientes. Esta comprobación la hemos verificado en la biblioteca del Departamento de Geografía de la Universidad de Barcelona, donde un amplio muestreo sobre la lista bibliográfica de las últimas adquisiciones mostró la existencia de un número importante, alrededor del 30%, en el que la lectura de alguna de sus partes exigía el conocimiento de ciertos conceptos matemáticos que no siempre poseen nuestros alumnos, ni el mismo profesorado. En el mencionado muestreo se prescindió, como parece normal, de las obras cuya primera edición en la lengua vernácula poseía una antigüedad superior a diez años, de aquéllas que

cabe calificar como no expresamente geográficas —textos de economía, por ejemplo— y de algunas otras no temáticas ni metodológicas. Y nótese finalmente que nuestro experimento se ha referido exclusivamente a obras, no a artículos ni demás trabajos.

El porcentaje arriba indicado resulta sorprendentemente elevado, toda vez que la adquisición de obras en el mencionado departamento se efectúa a partir de las desideratas del profesorado. Un profesorado, no lo olvidemos, mayoritariamente no proclive al uso de las matemáticas en Geografía. En bastantes casos —esto es una mera suposición, pero, creo, válida y significativa— el profesor eligió es sus pedidos un libro por un sugestivo título en su campo de trabajo, a falta de otras referencias, comprobando luego, presumiblemente con sorpresa, que su contenido o su tratamiento, respondiendo al título, era marcadamente matemático o utilizaba matemáticas. Hemos constatado que en un notable porcentaje tales obras nunca han sido consultadas en préstamo, lo que no deja de ser paradójico, aunque no tanto si se tiene en cuenta la dificultad señalada para el solicitante (como anécdota, la obrita de ROSSIER, P. (1953), con el título de Géographie mathématique, en realidad un breve manual sobre fundamentos de Geodesia, Cartografía y Astronomía, no ha debido ser jamás leída, como delatan sus páginas unidas, tal vez por el temor al adjetivo de su título).

En algún caso la dificultad de comprensión va a ser casi insuperable. Citemos al respecto la impresionante obra de WEBBER, M. J. (1979), profesor de Geografía en Ontario, para cuya comprensión se requiere ser al menos un buen matemático. El aspecto formal de este libro es similar al de los textos densos de cualquier curso universitario de la licenciatura de Matemáticas. Las definiciones, lemas, demostraciones, corolarios, etc., numerados, partiendo de las definiciones de espacio muestral y de espacio de probabilidad y

utilizando los cálculos infinitesimal, diferencial, integral y matricial, hacen de él un libro de Geografía urbana formalizada matemáticamente. Pero con esta excepción, en la mayoría de los libros analizados las matemáticas utilizadas no exigen del lector, para su comprensión íntima, unos conocimientos en modo alguno superiores a los que precisa un economista o un biólogo, por citar dos profesionales en ciencias relacionadas con los campos de la Geografía humana y de la física. No obstante, ese bagaje, que luego concretaremos, no es poseído en general por nuestros alumnos, ni, muchas veces, por el mismo profesorado.

3. CONOCIMIENTOS MATEMÁTICOS QUE PRECISA EL ALUMNO DE GEOGRAFÍA

Llegados a este punto, podríamos preguntarnos qué conocimientos debe poseer el alumno de Geografía o el mismo profesor—aquí no debe admitirse distinción—. Y al tiempo, cómo debe alcanzar el primero esos conocimientos.

La respuesta sucinta a la primera cuestión es: aquéllos que le permitan acceder, con garantía de comprensión, a los trabajos geográficos modernos. No puede pretenderse, por supuesto, convertir al geógrafo en un matemático, como ya se ha dicho, por otra parte, y largamente, del geógrafo y el estadístico. Ello tampoco se hace con el economista o con el biólogo. La Matemática debe ser un útil más que, como científico, el geógrafo está, diríamos, obligado a conocer en sus bases y, con cierta profundidad, en los apartados o temas de mayor aplicación en su campo de trabajo. Esto mismo hacen los otros dos profesionales aludidos. Rechacemos, pues, el peligro que algunos quieren ver en la introducción de las matemáticas en Geografía. Ellas no van a convertir nuestra ciencia en otra distinta; van, en todo caso, a dignificarla como ciencia. Y si no, si los resquemores persisten, véase lo que ha ocurrido en otros campos, quizás menos versátiles,

en un principio, al empleo de las matemáticas, como en la Lingüística, por ejemplo.

El repaso a la bibliografía geográfica de publicación reciente, así como la guía de algunos —aún escasos— manuales sobre "matemáticas para geógrafos", nos ha permitido esbozar en el último apartado un programa con los grandes temas de matemáticas que el geógrafo debería conocer.

La segunda pregunta planteada da pie a varias consideraciones de tipo práctico y pedagógico. Parece que si nuestros estudiantes se encuentran con serias dificultades a la hora de seguir algunas obras geográficas, donde el empleo de las matemáticas es frecuente —sean o no recomendadas en sus cursos—, por tener una formación matemática rudimentaria o por haber perdido la necesaria práctica, son los departamentos de Geografía los que deben ofrecer el remedio —"remedial mathematics", en expresión de HEPPLÉ, L.W. (1977)—. ¿Cómo puede ello llevarse a la práctica? Caben, al menos, tres posibilidades, a saber: a) la impartición de temas específicos de matemáticas en los cursos o asignaturas concretos que los requieran, b) la existencia de cursos de "matemáticas para geógrafos" dentro de la licenciatura de Geografía y c) la posibilidad, reglamentada administrativamente (con convalidación o validez curricular), de que el alumnado pueda cursar asignaturas de matemáticas en facultades o centros universitarios distintos al que pertenece (particularmente, en la Facultad de Ciencias Matemáticas).

La primera posibilidad, que en general no despierta grandes suspicacias en el profesorado, presenta el inconveniente de que particulariza el empleo de determinados temas matemáticos a casos muy concretos, lo que, sin ser grave, orienta al alumno hacia aplicaciones restringidas y empobrecedoras de las matemáticas en Geografía. La segunda propuesta, si se plantea el curso o los cursos con un programa bien estudiado, ha de permitirle el máximo aprovechamiento de los

conceptos impartidos en los temas geográficos y la posibilidad de continuar el aprendizaje. El mayor inconveniente de su puesta en práctica estriba en que tales cursos no son bien vistos como integrantes de una licenciatura en Geografía o en Geografía e Historia (bastante amplio es el campo o el objeto de la Geografía como para que, además, debamos enseñar matemáticas a los estudiantes —piensan algunos—). La tercera propuesta plantea de entrada problemas prácticos y, en especial, pedagógicos de muy difícil solución.

Entre los primeros problemas: ¿podría el alumno compatibilizar con desahogo su horario académico con la asistencia a un curso de matemáticas en una facultad distinta a la suya —en algún caso a cierta distancia física—, ¿en qué momento de su licenciatura debería hacerlo para que, sin que supusiera menoscabo en su formación estrictamente geográfica, pudiera aprovecharse al máximo de las nuevas enseñanzas? o ¿no se sentiría una buena parte del alumnado algo retraída a cursar una asignatura considerada difícil en un centro ajeno al suyo? Pero son las dificultades pedagógicas las de un peso fundamental. Desde mi punto de vista de matemático, creo que un alumno de Geografía no va a encontrar ninguna asignatura de la amplia gama que ofrece la licenciatura en Ciencias Matemáticas que le dé la asistencia de conocimientos que necesita. La gran mayoría de ellas poseen un nivel elevado, requiriendo obligadamente para su comprensión cursos o asignaturas previos. Un buen número, incluyendo las de primer curso, presentan un alto grado de abstracción, que, de entrada, va a suponer un severo obstáculo para ese futuro geógrafo, acostumbrado a otro lenguaje más inmediato y dirigido a objetos más concretos. Y ninguna de ellas abarcará en su totalidad los campos básicos que él requiere. Son, por así decirlo, excesivamente específicas, abstractas y superiores. No hace falta decir que difícilmente superará con éxito, académico o personal, tal tipo de materias. Pero puede buscar la ofer-

ta de asignaturas de matemáticas en otras facultades y centros universitarios, como en la Facultad de Económicas, en las escuelas de Ingeniería, etc. Aunque no con tanta complejidad, será también en estos casos dificultoso atinar con la asignatura adecuada, porque bastantes de ellas están demasiado dirigidas a los campos de interés de la licenciatura o de las enseñanzas en que se encuadran.

Por todo lo dicho, creemos que la solución más satisfactoria es la implantación en la licenciatura de Geografía de una asignatura de "matemáticas para geógrafos" (el nombre o título definitivo admite, obviamente, múltiples denominaciones).

Y al hilo de lo precedente, podríamos preguntarnos qué tipo de obras o textos de referencia ha de constituir el material básico de consulta del alumnado en esos cursos. Tres volverían a ser en este caso las posibles respuestas: a) obras escritas por matemáticos, b) obras preparadas por economistas, ingenieros, biólogos u otros científicos y c) obras escritas por geógrafos o por profesores vinculados a la enseñanza de la Geografía. Las primeras presentan para el estudiante de Geografía el grave inconveniente—ya señalado—de que suelen ser considerablemente abstractas, sumiéndole en el desánimo tras muy pocas páginas de lectura costosa. Esto, en cierta medida, es obviado en las segundas, donde se suelen recoger temas y aplicaciones de interés para el respectivo profesional, aunque no siempre para el geógrafo. Parece que el tipo de texto más apropiado es el escrito por el propio geógrafo, sobreentendida su sólida formación matemática, donde los temas, aplicaciones y ejercicios prácticos, que, naturalmente, han de constituir parte importante, y hasta conductora, de tal obra, sean específicamente geográficos. Aunque escasos, pueden ya citarse algunos textos de este tipo, con diferentes enfoques: WILSON, A.G. y KIRKBY, M.J. (1975), SUMNER, G.N. (1978) y THOMAS, R.W. y HUGGETT, R.J. (1980).

Cabe, por último, preguntar a qué nivel debe el geógrafo plantearse el aprendizaje de las matemáticas. Pues, en buena medida, a un nivel instrumental y a otro metodológico, como ya señalaba CASTRO, C. (1982) para el caso de la Estadística. Las matemáticas van a ser una herramienta básica y poderosa para el geógrafo, cuyos mecanismos y funcionamiento en los temas de su interés debe conocer, diríamos, con soltura rutinaria. Pero, su talante de científico en relación con el perfeccionamiento, el avance y la investigación de nuevas soluciones a sus problemas le obliga a adquirir, en su aprendizaje, aquellas nociones y conceptos fundamentales. Por poner un ejemplo, el geógrafo debe saber obtener las derivadas de funciones ordinarias, para lo cual basta que tenga a mano una tabla de derivadas y que haya resuelto algunos casos. Pero sería muy necesario que conociera y aquilatara el concepto de derivada de una función en un punto, sin exigirle, quizá, las demostraciones de los teoremas de derivación y de las fórmulas de su tabla de derivadas. Bastaría, pues, que, por una parte, supiera calcular la derivada de $y = \ln(e^x/e^x - 1)$, por ejemplo, y, por otra, comprendiera el significado y el desarrollo de:

$$f'(x_1) = \lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{\Delta y_1}{\Delta x_1} = \lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + \Delta x_1) - f(x_1)}{\Delta x_1}, \text{ partiendo}$$

de $y = f(x)$.

4. GRANDES TEMAS DE MATEMÁTICAS A INCLUIR EN UN PROGRAMA DE "MATEMÁTICAS PARA GEÓGRAFOS"

A modo de epílogo, podemos señalar, tras la consulta de los textos de "matemáticas para geógrafos" citados en el apartado anterior, y de otras obras, los grandes temas que pueden conformar un programa de un curso con un título como el entrecorrido o similar. Vamos a señalar sólo los epígrafes generales, sin desglosarlos en detalle, ni mencionar las aplicaciones geográficas y los ejercicios a desarrollar, ni más indicaciones pedagógicas que las mencionadas en el

apartado anterior, que superarían el marco del presente panel. Los grandes temas serían:

- 1.Elementos de Aritmética y Geometría.
- 2.Logaritmicación.Progresiones.Combinatoria.
- 3.Trigonometría y vectores.
- 4.Álgebra elemental.Ecuaciones.
- 5.Teoría de conjuntos.Estructuras algebraicas.
- 6.Aplicaciones y funciones.
- 7.Geometría analítica.
- 8.Álgebra matricial.
- 9.Teoría de la probabilidad.
- 10.Elementos de Topología.Teoría de grafos.
- 11.Elementos de Cálculo infinitesimal.
- 12.Derivación.
- 13.Integración.
- 14.Ecuaciones diferenciales elementales.
- 15.Procesos estocásticos.

El desarrollo de este programa, con las aplicaciones pertinentes, a los niveles de aprendizaje instrumental y metodológico señalados, y suponiendo unos conocimientos matemáticos rudimentarios por parte del alumnado, exigirá probablemente la existencia de dos asignaturas, una continuación o, mejor, ampliación de la otra, que, creemos, deberían impartirse, con el rango de asignaturas instrumentales, en los cursos primero y segundo de la licenciatura en Geografía o en Geografía e Historia.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ATKIN, R.H.(1974): Mathematical structure in human affairs. London, Heinemann.
- BAILLY, Antoine S.(et al)(1984): Les concepts de la géographie humaine. Paris, Masson.
- BEGUIN, Hubert(1984): "Analyse quantitative", in BAILLY, A.S. (1984), pp.163-171.
- CASTRO, Constancio de(1982): "Elementos de Metodología Descriptiva para el Análisis Espacial", Luzarralde, 5, pp.409-471, San Sebastián, I.N.G.E.B.A.
- GATRELL, Anthony(1983): Distance and Space: A Geographical Perspective. Oxford, University Press.
- HARVEY, David(1969): Explanation in Geography. London, Arnold.
- HEPPLE, L.W.(1977): "Mathematics in geography", Progress in Human Geography, I, 3, pp.525-527.
- JOHNSTON, R.J.(1978): Multivariate statistical analysis in geography. A primer on the general linear model. London, Longman.
- QUEYSANNE, Michel(1964): Algèbre. Paris, Colin.
- ROSSIER, Paul(1953): Géographie mathématique. Paris, Société d'Éditions d'Enseignement Supérieur.
- SUMNER, Graham N.(1978): Mathematics for Physical Geographers. London, Arnold.
- THOMAS, R.W. y HUGGETT, R.J.(1980): Modelling in geography: a mathematical approach. London, Harper and Row.
- TINKLER, Keith J.(1979): "Graph theory", Progress in Human Geography, 3, 1, pp.85-116.
- WEBBER, M.J.(1979): Information Theory and Urban Spatial Structure. London, Croom Helm.
- WILSON, A.G. y KIRKBY, M.J.(1975): Mathematics for geographers and planners. Oxford, Clarendon Press.