Clorinda Palafox
Universidad Complutense

METODOS DE ANALISIS MULTIVARIANTE EN GEOMORFOLOGIA

1. INTRODUCCION

El objetivo de esta comunicación es dar a conocer, a grandes rasgos, algunas técnicas de análisis multivariante, utilizadas en el campo de la Geomorfología en los países de habla anglosajona. Este tipo de técnicas empiezan a ser aplicadas en trabajos aislados a finales de los años 50. Antes se habían introducido técnicas simples de estadística en el tratamiento de los datos gracias a los avances técnicos que se realizaron a partir de los años 30, como la mejora de los mapas topográficos y a la aparición de fotografias aéreas, que permitieron disponer de mayor cantidad de datos y de mejores mediciones de los mismos.

Las técnicas de análisis multivariante permiten ver si los diferentes factores que determinan un hecho natural estan relacionados entre sí, son utilizadas también para ordenar estos factores según su importancia y ver si alguno de ellos refuerza el efecto de otro. Este estudio simultáneo de varios factores inter–relacionados ha sido posible gracias a la utilización de ordenadores que permiten procesar y elaborar gran cantidad de datos. Anteriormente, ante la dificultad de trabajar con los múltiples factores que intervienen en los problemas geomorfológicos, tan sólo se intentaba buscar relaciones entre dos variables, considerándolas como causa y efecto por ser las que realizaban un mayor control del hecho estudiado. Las bases del análisis multivariante consisten, pues, en relacionar todas las variables independientes (factores) con la variable dependiente (hecho natural), evaluándolas simultáneamente en diferentes situaciones, combinaciones y magnitudes. La relación entre la variable dependiente y las independientes debe hacerse o bien interpolando o prediciendo valores de la variable dependiente (lo que se conoce como curva de ajuste), o bien explicando la variación de la variable dependiente por las independientes. Entre éstos métodos se encuentran el análisis de regresión múltiple y el de correlación múltiple.

El término de análisis espacial es utilizado para denominar la unión de técnicas analíticas y de modelos en los que existen una clara relación entre los datos cuantitativos y el espacio en el que se han tomado. Dentro de estas técnicas de análisis, que pueden ser a su vez multivariantes, cabe destacar algunas de gran importancia que se caracterizan por su reciente aplicación en los problemas geomorfológicos como son: el análisis factorial, el análisis "cluster" y el análisis discriminante. Otras técnicas de análisis espacial fueron ya utilizadas a partir de los años 60, como el análisis de superficies de tendencia (análisis polinomial, espectral, armónico, series de furier) y la cartografía automática (utilizada para interpolación de contornos y elevaciones) (CHORLEY, 1972). Ultimamente se ha iniciado la investigación sobre la construcción de modelos de simulación espacial en geomorfología. Esta técnica, poco desarrollada todavía, tan sólo ha sido aplicada en la simulación de redes fluviales y en la sedimentación marina.

2. ANALISIS DE REGRESION MULTIPLE

La mayoría de las distribuciones espaciales en los hechos geomorfológicos son tan complicadas en su estructura y en sus relaciones que no pueden ser explicadas de una manera satisfactoria utilizando una sola variable independiente; es necesario entonces buscar otras variables que estén relacionadas y descubrir mediante el análisis de regresión múltiple, si la variación de una variable dependiente (por ejemplo: El área de una cuenca de drenaje) se explica mejor con dos o más variables independientes juntas, que con cualquiera de ellas tomadas por separado. Muchas veces es posible explicar una importante proporción del total de la varianza de una variable dependiente por un limitado número de otras variables. Esta parte que explica la variación puede tomar cualquier forma (lineal, exponencial, polinomial) aunque el modelo lineal es el que más frecuentemente se utiliza en los trabajos por ser el menos complicado.

Como es sabido, el modelo lineal expresa la relación entre la variable dependiente y varias variables independientes mediante una ecuación de regresión múltiple de la forma:

$$Y = a + bx_1 + cx_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + nx_n$$

Donde Y representa la variable dependiente; x_1, x_2, x_3, ... x_n son las variables independientes, y a, b, c, ..., n, son constantes númericas que han de calcularse mediante el método de mínimos cuadrados.

Cuando el análisis de regresión múltiple incluye dos variables independientes, se puede representar en un bloque diagrama en tres dimensiones (la 3ª para la variable dependiente); si el análisis incluye más de dos variables independientes, la relación ya no puede representarse en un gráfico pues sobrepasa el espacio tridimensional; el número de dimensiones depende por tanto del número de variables (n).

Ya en 1959, Krumbein utilizó métodos de análisis de regresión multiple para el estudio de la influencia de 4 factores en la estabilidad de las playas y observó que juntos explicaban más del 76°/o de las variaciones de la estabilidad observadas.

En un estudio de dolinas, Jennings, (1962), utiliza también el método de regresión. Una vez analizados los datos, (longitud, anchura, profundidad, y dirección del eje mayor), observa que la varianza de la profundidad de las dolinas está relacionada con la longitud del eje mayor y con la anchura, y que la variación del ángulo formado por la vertiente de la dolina y el fondo es escasa pues éste permanece más o menos estable. Esta escasa variación del valor del angulo lateral indica, según Jennings, que los procesos de superficie son los que tienen el papel más importante en la evolución geomorfológica de las dolinas y no los procesos de derrumbamiento, como normalmente se acepta.

Doornkamp y King (1971), aplican esta ecuación en un estudio sobre cuencas de tercer orden en el Sur de Uganda, hallando que el 91°/o de la variación en el área de la cuenca es explicada por el número y la longitud de los cursos de 3° orden, y en un 81°/o por el número y la longitud de los cursos de 1° orden.

Davis (1973), expone algunos programas que pueden utilizarse para la resolución de las ecuaciones de análisis de regresión múltiple. El programa MULTR, halla el análisis de regresión (R), el coeficiente de determinación (R^2), da una lista de la variable dependiente Y_i, la regresión estimada $\hat{Y}_i$ y la desviación $(Y_i - \hat{Y}_i)$. Davis aplica este programa a un estudio hecho por Krumbein y Shreve (1970) que analiza la influencia de 6 variables sobre la magnitud de cuencas de tercer orden en Kentucky. Davis aplica detalladamente los pasos que realiza para analizar automáticamente esos datos y posteriormente modifica el programa para que trabaje con menos error.

3. ANALISIS FACTORIAL

El objetivo del análisis factorial es reducir la dimensión del espacio de medida perdiendo la mínima explicación (varianza) posible. Se busca así, un número menor de variables (factores) que serán combinación lineal de las variables originales, de tal manera que el primer factor sea el que explique la mayor varianza, el segundo explique menos que el 1° pero más que el 3°, y así sucesivamente. Vemos, pues, que a través del análisis de datos se pueden reducir numerosas variables a unos pocos factores que proporcionan un resumen de los datos originales. Los factores resumen variables intercorrelacionadas entre sí, por lo que cuanto mayor sean las intercorrelaciones entre las variables, menor será el número resultante de factores.

Si se realiza el análisis factorial por medio de un ordenador se puede utilizar n variables las cuales se distribuirán en un espacio n–dimensional, en una forma hiper–elipsoidal, con n dimensiones y n ejes. El eje más largo seguirá la tendencia general de la mayoría de los puntos "localizados" en ese espacio y este eje será el que más se acerque a la tendencia de los datos. Algunas de las variables quedarán cerca de este eje mayor, el cual es conocido como factor I y tendrán un alto peso en este factor. Las variables que se encuentran a mayor distancia del factor I, en el espacio n–dimensional, tendrán un peso bajo en ese factor y estarán más próximas a otros ejes de la hiper–elipse. Los ejes (factores) de este cuerpo geométrico son llamados I,II,III,......en orden decreciente a su longitud. Así, las variables que se encuentran cerca del segundo eje más largo se dice que tienen un alto peso en el factor II. El peso o carga de los factores es la correlación existente entre una variable y un factor determinado.

Para aplicar este método, se construye una matriz de correlación con los datos originales estandarizados, la cual se reemplaza por una matriz de los pesos o cargas de los factores, que se realiza calculando la distancia entre la dispersión de los valores de las variables y el eje–factor.

Los ejes de la hiper–elipse se disponen en ángulo recto, así, una vez encontrado el eje mayor I, el segundo será medido en ángulo recto (u ortogonal) al primero, y así sucesivamente. Pero hay una serie de métodos que permiten superar esta posición obligada de los ejes–factores; uno de ellos los permite "rotar" para que encuentren una posición en la cual un número reducido de variables tenga un gran peso en cada factor, mientras que el resto de las variables tengan valores cercanos a cero. Esto facilita la interpretación de los resultados.

Doornkamp y King (1971) han aplicado el análisis factorial en una región del Sur de Uganda a 18 variables morfométricas medidas en cuencas de 3º orden. El resultado de dicha aplicación es que la información se resume en los 6 primeros factores los cuales explican un 94% de la variación de los datos originales. El factor I está relacionado positivamente con el área de la cuenca y la longitud de los cursos, mientras que está negativamente relacionado con la densidad de drenaje, la freuencia de los cursos y la proporción de relieve. Así, se puede decir que el factor I está compuesto esencialmente por las variables relacionadas con el tamaño de la cuenca y puede ser llamado Factor de Tamaño. Este factor, aumenta proporcionalmente con el área de la cuenca y con la longitud de los cursos, pero decrece cuando aumentan las medidas de intensidad de disección de la cuenca. El factor II está esencialmente relacionado con las variables de número de cursos de los diferentes órdenes. Los factores I y II explican el 70% de la variación de los datos totales. Los otros factores contribuyen a una explicación progresivamente menor: de esta forma el análisis factorial indica la relativa importancia de las variables en la explicación de todos los datos: las variables más importantes en este estudio son las que se refieren al tamaño de la cuenca.

Otra aplicación de esta técnica la realiza Mather (1976) en un ejemplo basado en el trabajo de Gustafson (1973), el cual utiliza también diversas variables morfológicas en cuencas de drenaje de Europa Central. Mather toma 8 de estas variables en algunas de las cuencas, con ellas aplica el análisis factorial y halla las matrices y las diversas operaciones del análisis mediante un ordenador, utilizando una serie de subrutinas en FORTRAN que se hallan descritas en dicho libro.

4. ANALISIS CLUSTER

El análisis cluster es un método de clasificar los casos estudiados en grupos más o menos homogéneos. Debido a que los métods tradicionales de clasificación son muy subjetivos, se han buscado nuevas técnicas que sean capaces de incorporar los datos en el ordenador. Estas técnicas de clasificación llamadas métodos de taxonomía numérica, permiten dar una mejor interpretación de los datos mediante el análisis de las causas intrínsicas de la agrupación de los mismos.

El análisis cluster mide el grado de similitud entre cada par de casos mediante un coeficiente. Este coeficiente puede ser: el coeficiente de correlación (r_{ij}) o el coeficiente de Distancia Euclidiana (d_{ij}) (1). Una vez hallada la matriz de distancias o de coeficientes entre los diferentes casos, se van agrupando éstos de manera que los que tengan una mayor similitud, es decir los que tienen distancias más cortas o un alto coeficiente de correlación, se colocan juntos. Luego, unos grupos de casos se asocian con los grupos más homogéneos a ellos y así sucesivamente hasta que todos los casos han sido dispuestos en un árbol de clases o dendrograma, el cual lleva una escala de medida de las distancias que permite ver la información que se pierde a medida que se agranda la distancia. Hecho este árbol que une a todos los grupos en una clase común, puede realizarse una división de grupos mediante un "corte" en el punto del árbol donde aparezca un cambio brusco de la semejanza entre los grupos.

Existen varios métodos de análisis de clasificación entre los cuales los más utilizados son: Los métodos jerárquicos y los de reagrupamiento.

El método de reagrupamiento parte de la hipótesis de que se conoce el número de grupos a formar, por lo que el objetivo consiste en distribuir los datos entre los diversos grupos, de tal forma que se aminore la medida de similitud interna entre los datos que pertenecen al mismo grupo y se agrande la divergencia entre los diversos grupos.

Los métodos jerárquicos unen grupos para formar uno nuevo (métodos aglomerativos) o bien separan grupos formando nuevos subconjuntos (métodos divisivos). En estos métodos se tiene en cuenta todas las variables de cada caso para agrupar o separar clusters según la mayor similitud o diversidad de los mismos. Así, en estas subclases formadas se puede estudiar las cualidades comunes de los casos o grupos que se unen en un determinado nivel. Una vez agrupados dos casos o grupos, éstos pueden considerarse como un solo caso, entonces se puede recalcular las nuevas medidas de similitud mediante una nueva matriz de distancias. El método más simple de recalcular las nuevas medidas es mediante la media aritmética. Este procedimiento se llama método jerárquico de pares agrupados por distancia media (Average linkage).

Aunque aplicar la técnica cluster en un conjunto de datos pequeño es relativamente sencillo, puede resultar trabajoso si aumenta el tamaño de la muestra por lo que se puede utilizar programas de computador para su realización. Davis (1973) proporciona un programa llamado CLUSTR el cual calcula: el grado de similitud, bien mediante el coeficiente de correlación o bien por el de distancia euclidiana, recalcula los valores hallados una vez agrupados dos casos o grupos y, mediante una serie de subrutinas, ejecuta el cluster y dibuja el árbol de clases. Mather (1976) proporciona también, otro programa (HIERARCHICAL CLUSTER ANALYSIS) para aplicar la técnica de cluster jerárquico.

Mather (1976) aplica diferentes métodos de cluster a muestras de sedimentos obtenidos en una zona del Noroeste de Inglaterra. Estos sedimentos representan diferentes condiciones ambientales durante el Pleistoceno Superior. Previamente, divide cada muestra en 32 clases y hace una matriz entre muestras y clases a la que aplica un análisis de componentes principales para eliminar redundancias en los datos. Esto le permite reducir el número de variables (clases) a 13 perdiendo sólo el 3% de la información original. Mather analiza los diferentes dendrogramas obtenidos por diversos métodos de cluster llegando a la conclusión de que cada método tiene sus propias particularidades y que cada uno puede producir diferentes conclusiones a partir de datos semejantes, pues todo depende de cómo se estructuren los datos.

Mather (1972) realizó otro estudio de análisis de clasificación jerárquica, preocupándose principalmente por clasificar áreas homogéneas y contiguas en el espacio, es decir, por la delimitación de regiones. Para ello modifica la matriz de similitud (para la que utiliza el coeficente de distancia euclidiana) introduciendo un signo negativo delante de los elementos que presentan similitud entre áreas no–contiguas en el espacio. Se consideran áreas contiguas a las que tienen un borde en común y no sólo una esquina. Mather toma un área de 4X15 km. de Nueva Zelanda y

(1) d_{ij} = ----- **donde ij son los casos y k son las distancias medidas.**

la divide en 60 zonas homogéneas en donde estima 10 variables contínuas (la altura máxima y mínima, el relieve relativo, el nº máximo de cursos y de isolíneas cruzados por una línea recta, el nº de isolíneas cerradas, nº de cursos de primer orden, etc.). Aplica a estas variables un análisis cluster jerárquico el cual es una modificación del método de Sokal y Michener (1958). El árbol de clases que resulta, cortandolo entre el valor de la distancia 1,0 y 1,5 muestra dos grandes regiones diferentes: una está situada al Este del área estudiada (A) y coincide con una zona montañosa por lo que la mayoría de las variables tienen valores por encima de la media. El segundo grupo (B) está situado al Oeste de la región y se caracteriza por ser una zona de poco relieve, con valores de las variables por debajo de la media. Aparte de estos dos grandes grupos aparecen dos pequeñas zonas, una caracterizada por sus condiciones pantanosas (C) y otra por su gran pendiente (D). Dos de las 60 zonas analizadas permanecen sin clasificar en el nivel de corte elegido, debido a que sus caracteres difieren del resto. (Ver figura nº 1).

Otro ejemplo de aplicación del análisis cluster es el de Doornkamp y King (1971) realizado sobre datos obtenidos en Uganda. Con estos datos realizan un árbol de clases de las 130 cuencas de tercer orden analizadas, basándose en el peso o carga de los factores de cada cuenca. El punto de corte tomado es el valor de 1,2 del coeficiente de similitud y el árbol queda así dividido en cinco grupos diferentes mientras que dos de las cuencas no se han unido todavía. Doornkamp y King analizan los 5 grupos resultantes y aprecian en ellos una cierta relación con las regiones morfológicas.

5. ANALISIS DISCRIMINANTE

El principal objetivo del análisis discriminante es encontrar una combinación lineal de las variables que se han medido, que proporcione la máxima diferencia entre dos o más grupos definidos previamente en una clasificación. Esta combinación lineal es una función discriminante que maximiza la distancia de los valores de las medias de las variables entre los grupos y minimiza la dispersión de los datos (varianza) dentro de cada grupo. El análisis discriminante se emplea tanto para comprobar el grado de significación estadística de la clasificación realizada por el cluster, como para determinar las causas más importantes de las diferencias entre los grupos formados, y también para incluir algún caso sin clasificar en el grupo más apropiado con el mínimo error posible.

– *Análisis Discriminante entre dos grupos*– En el estudio de las diferencias entre dos grupos A y B, el caso más simple es el que tiene en cuenta sólo 2 variables (X_1, X_2) en cada grupo; la máxima separación entre ámbos puede entonces representarse mediante la proyección de los 2 puntos centrales (centroides) a una recta L, que representa la función discriminante. Esta recta o eje debe estar orientada de manera que dichas proyecciones queden lo más separadas posible a la vez que se minimice la dispersión de los datos de cada uno de los grupos. (Ver figura nº 2). Las posiciones de los puntos sobre esta línea pueden ser utilizadas para decidir a qué grupo se pueden asimilar los casos dudosos. Por ejemplo, un caso sin clasificar, P, proyectado sobre la recta L, permite observar que éste se encuentra más próximo al grupo B que al A, por lo que será incluido en el grupo B. En este ejemplo puede observarse que las proyecciones de los grupos A y B se solapan sobre los ejes X_1 y X_2, cuando en realidad son grupos distintos.

Un método para calcular la función discriminante lineal ($Y = {}_1X_1 + {}_2X_2 + \ldots + {}_nX_n$), es el de regresión. Una vez hallados los coeficientes de la función discriminante, ésta toma la forma de una ecuación de regresión múltiple donde se pueden reemplazar los valores X de la ecuación por su medias (X) primero para el grupo A y luego para el B– obteniendo, así, la proyección del valor medio de cada grupo (A, B) en la recta de regresión. En ésta recta se halla entonces el punto medio (R_O) entre el centroide del grupo A y el del B mediante: $R_O = \frac{A + B}{2}$. Este punto medio entre los centroides, se utiliza como punto de separación entre los grupos, pudiéndose así clasificar nuevos casos según estén más cerca de la media de un grupo u otro. Puede suceder que puntos de A aparezcan localizados dentro del grupo B, y a la inversa; éstos puntos quedarían, pues, mal clasificados por la función discriminante.

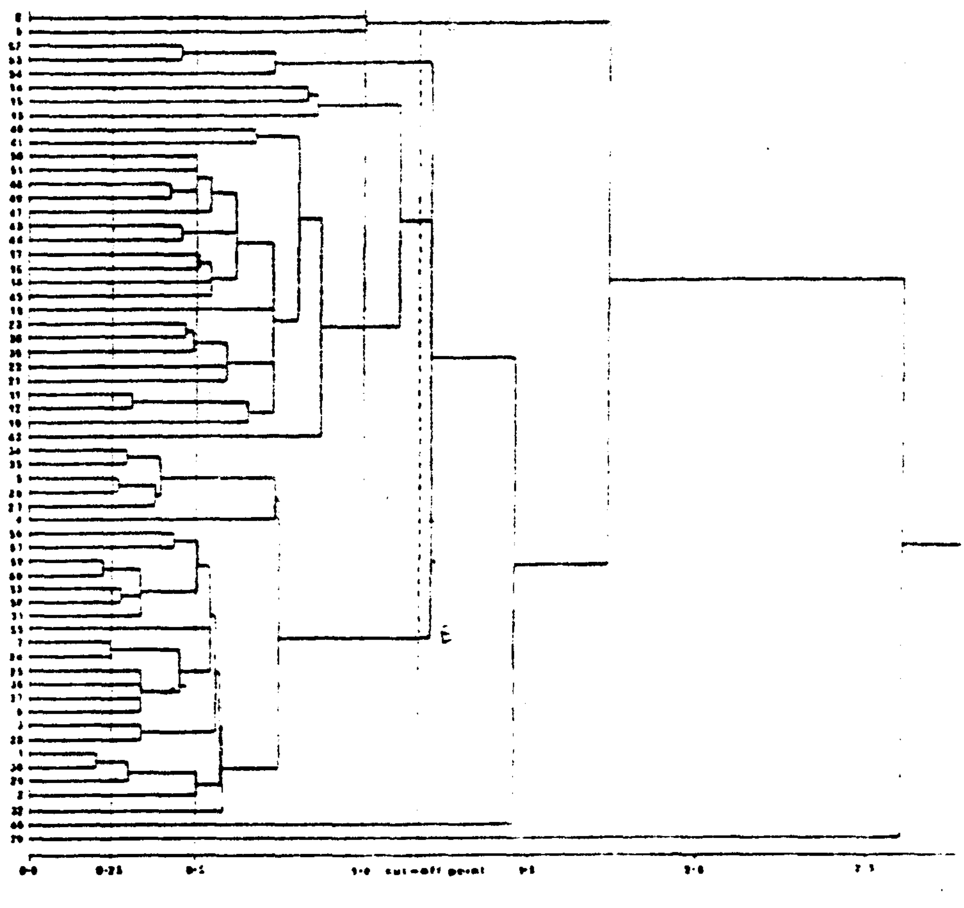


Figura n° 1.

Arbol de clases que representa la clasificación de 60 áreas atendiendo a la contigüidad espacial y las características geomorfológicas. Estudio realizado por Mather (1972) en Nueva Zelanda. "Areal classification in geomorphology". Incluído en: Chorley (1972), *Spatial Analysis in Geomorphology.*

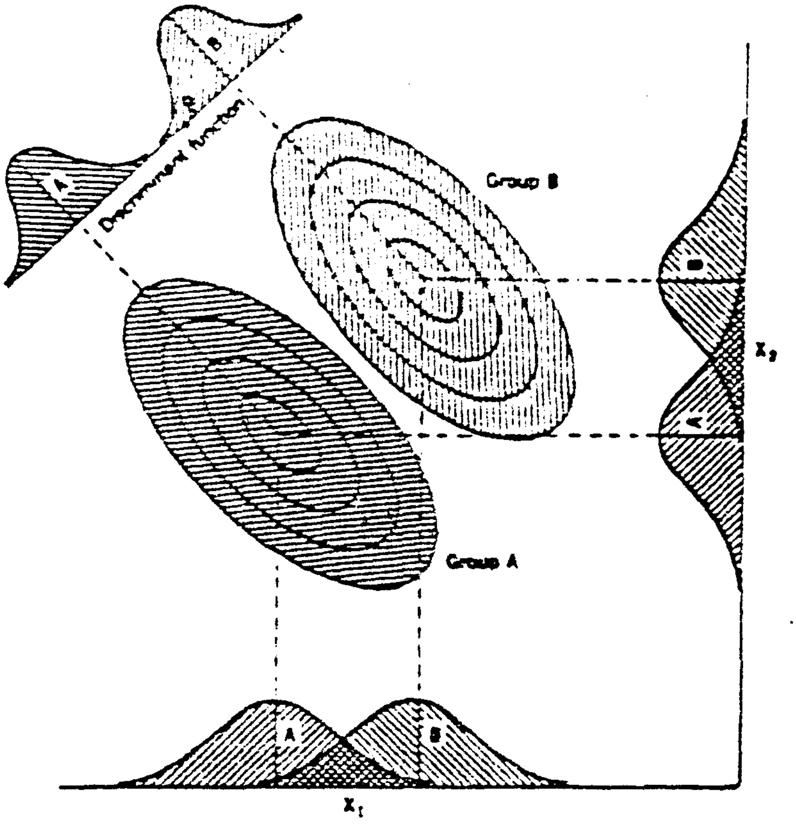


Figura n° 2.

Representación del análisis discriminante entre dos grupos para el caso de 2 variables (X_1, X_2). Los grupos A y B se solapan en ambas variables, pero pueden ser diferenciados mediante la proyección de sus elementos en la recta de función discriminante. Davis (1973), *Statistics and Data Analysis in Geology*.

Para comprobar si los puntos han sido bien clasificados por la función discriminante, se parte de la hipótesis nula de que las 2 medias de los grupos son iguales o, lo que es lo mismo, que la distancia entre ellas en la recta discriminante es cero. Se aplica entonces el Test de T^2 que permite obtener un número que se compara con la tabla de valores F a un determinado nivel de significación; si el valor obtenido es mayor que el de la tabla, la hipótesis nula puede ser rechazada. Aunque esto no significaría necesariamente que todos los puntos estén bien clasificados, por lo que se ha de calcular el porcentaje de error cometido.

El programa DISCRM que porporciona Davis (1973) permite calcular la función discriminante lineal entre dos grupos; determinar si la diferencia entre los grupos es significativa, e investigar la relativa importancia de las variables utilizadas. Mather (1976) propone también otro programa para realizar el análisis discriminante entre dos grupos.

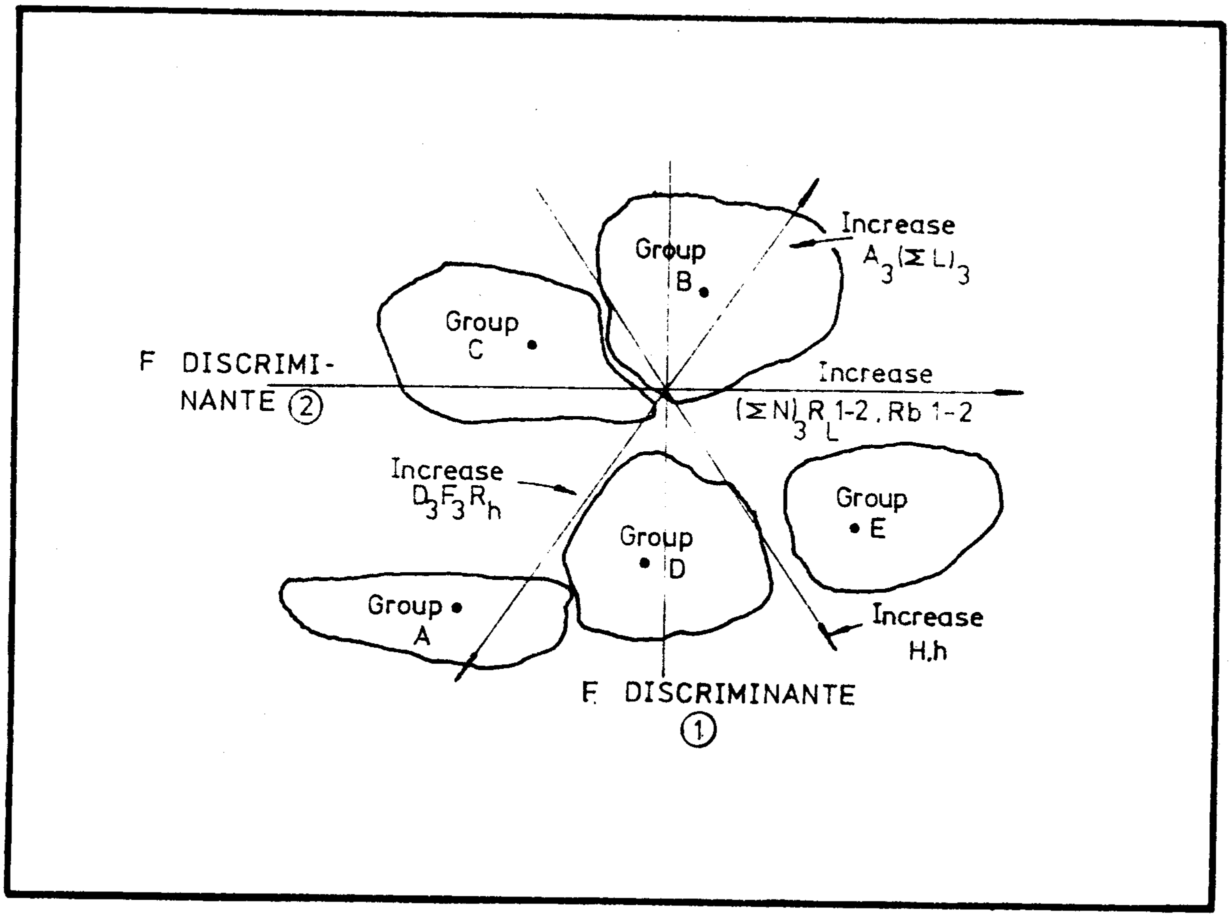
Thomas (1969) realiza una aplicación del análisis discriminante entre dos grupos en su estudio sobre sedimentos glaciares y periglaciares en una ladera Norte de la Isla de Man. El grupo 1 lo constituyen los depósitos de solifluxión y el 2 los lechos de gravas. El objetivo de su estudio es determinar si existen diferencias estadísticamente significativas entre los dos grupos, teniendo en cuenta 4 variables (media, asimetría, curvatura y curtosis). Una vez computarizados los datos, verifica si existen diferencias significativas entre los datos mediante la hipótesis nula ya explicada; posteriormente halla la ecuación de regresión y, de ella, los valores de cada uno de los elementos de los grupos. El punto medio entre los 2 grupos permite clasificar nuevas muestras de sedimentos de este área concreta de la Isla de Man en el grupo 1 ó 2 según sus valores en las 4 variables. Los valores del grupo 1 oscilan entre −4,4 y 8,2 y los del grupo 2, entre −2,0 y −13,1. Thomas, observando los datos, ve que existe un cierto solapamiento de los grupos, aunque sólo dos de los datos del grupo 2 tiene valores incluidos en el rango de los de los depósitos de solifluxión y sólo 6 del grupo 1, están dentro del rango del grupo 2. Finalmente calcula la contribución de cada una de las 4 variables a la separación realizada por la función discriminante. La variable de asimetría es la que más explica este poder discriminante de la función (43°/o); la curtosis explica el 30,7°/o la media el 15,2°/o y la curvatura el 13,9°/o.

– *Análisis Discriminante Múltiple.*– Aunque el análisis discriminante entre dos grupos ha sido muy utilizado, es más frecuente que existan más de 2 grupos dentro de un conjunto de datos. El análisis discriminante múltiple proporciona una comparación simultánea de varios grupos en los que se han medido una serie de variables. Este análisis se basa en las mismas suposiciones que el anterior, y se parte también de la misma hipótesis nula, en la que las medias de los elementos o casos de los n grupos son iguales. Esta hipótesis se verifica mediante el test de Lambda; si este test permite rechazarla, puede decirse que existen diferencias significativas entre los diversos grupos.

En el caso de 2 grupos, sólo es necesario un eje o recta discriminante para separar los grupos, mientras que en un caso general de n grupos se necesita n−1 ejes discriminantes para explicar el 100°/o de la diferencia entre los grupos, pero normalmente los ejes que añaden poca explicación a la diferencia no se tienen en cuenta. Estos ejes o funciones se van asentando ortogonalmente en un espacio n–dimensional de manera que se maximicen las diferencias entre los grupos en cada eje. El primer eje discriminante explica la máxima diferencia; el 2° eje es ortogonal al 1°, y proporciona una explicación menor que el 1° pero mayor que el 3°, y así sucesivamente.

Cuando se ha establecido, por medio de un test estadístico, el n° de ejes a utilizar, los casos sin clasificar se pueden localizar en la clase más adecuada, bien dibujando los puntos, que representan casos, en un gráfico, e introduciendo cada punto no identificado en la clase cuyo centroide esté más cercano, o bien, calculando una función de distancia, similar a la usada en el análisis Cluster, de manera que el punto no identificado se incluye en el grupo cuyo centro está situado a una distancia menor. Mather (1976) proporciona un programa para realizar el análisis discriminante múltiple por ordenador.

Doornkamp y King (1971) aplican el análisis discriminante múltiple a su estudio de Ugan-



Group
B
Group
C
Increase
$A_3(\Sigma L)_3$
F DISCRIMI-
NANTE ②
Increase
$(\Sigma N)_3 R_L$ 1-2 , Rb 1-2
Increase
$D_3 F_3 R_h$
Group
E
Group
D
Group
A
Increase
H,h
F DISCRIMINANTE
①

Figura n° 3.

da. Para ello, parten de los 5 grupos hallados anteriormente en el cluster y calculan mediante tests estadísticos que la diferencia significativa que existe entre los grupos es del 99 $^{o}/_{o}$, y que el 98$^{o}/_{o}$ de esta diferencia la explican las dos primeras funciones discriminantes. Tomando como ejes las 2 funciones, representan cada una de las cuencas de drenaje mediante los valores que toman en estas funciones, pudiendo así delimitar fácilmente cada uno de los grupos definidos por el análisis cluster e incluir las cuencas no clasificadas en los grupos más cercanos a ellas.

A continuación, Doornkamp y King construyen una tabla que relaciona las funciones discriminantes con los factores del análisis factorial, para poder analizar la contribución relativa de cada factor en cada función discriminante. Observan así, que la función discriminante 1 se relaciona positivamente con los factores I y VI (tamaño y cociente de la longitud de los cursos de 2^{o} y 3^{o} orden) y negativamente con el factor IV (relieve relativo). La función discriminante 2 está asociada positivamente con los factores II y IV (n^{o} de cursos y relieve relativo).

A partir del estudio de estas relaciones, los autores, construyen un modelo que explica la relación general entre las funciones discriminantes 1 y 2 y los 6 factores de la tabla. En este modelo, el eje vertical expresa la función discriminante 1 y el horizontal la 2. Los factores son representados dentro de estos ejes por vectores que indican su dirección de crecimiento. Este modelo lo superponen a la gráfica donde han representado los diferentes grupos con sus centroides y lo relacionan con las medias de los valores de las variables para cada grupo del cluster. (Ver figura n^{o} 3). De ésta forma las características de cada uno de los 5 grupos pueden describirse mediante un modelo general, el cual permite observar que, de las 18 variables medidas, cuantro son fundamentales para realizar la separación de los grupos de cuencas; estas cuatro variables son: el área de la cuenca A_3, el n^{o} total de cursos de la cuenca $(L)_3$, la densidad de drenaje D_3, y el máximo relieve de la cuenca H.

BIBLIOGRAFIA

CHORLEY, R.J. (1965). "The application of quantitative methods to geomorphology" In: J. Chorley and P. Hagget (eds.) *Frontiers in Geographical Teaching* London, Methuen, pp. 147–163.

– (1972), *Spatial analysis in Geomorphology.* London, Butler & Tanner Ltd.

DAVIS, J.C. (1973) *Statistics and Data Analysis in Geology.* New York, Wiley & Sons.

DOORNKAMP, J. and KING, C. (1971), *Numerical Analysis in Geomorphology.* London, Arnold.

ESTEBANEZ, J. y BRADSHAW, R.P. (1979), *Técnicas de Cuantificación en Geografía.* Madrid, Tebar Flores.

GRIFFITHS, J.C. (1966). "Application of discriminant funcions as a classification tool in the geosciencies". In: D.F. Merriam (ed.) (1966), Golloquium on classification procedures. *Computer Contribution,* 7, State Geological Survey, Lawrence, Kansas, pp. 48–52.

GUSTAFSON, G.C. (1973), "Quantitative investigation of the morphology of drainage basins usin orthophotography". *Münchener Geographische Abhandlungen,* Band 11, Geographische Institut, München.

JENNIGS, J.M. and BIK (1962). "Karst morphology in Astralian New Guinea". *Nature* num. 194, pp. 1036–8.

KING, L.J. (1969), *Statistical analysis in Geography.* Prentice–hall, Englewood cliffs.

KLOVAN, J.E. (1966). "The use of factor analysis in determining depositional enviroments from grain–size distributions". *Journ. Sedim. Petrol.* num. 36, pp. 115–125.

KRUMBEIN, W.C. (1959). "The sorting out of geological variables illustrated by regresssion analysis of factors controlling beach firmness". *Journal of Sedimentary Petrology.* num. 29, pp. 575–87.

KRUMBEIN, W.C. and SHREVE, R.L. (1970). "Some statistical properties of denritic channel networks: Tech. Rept. 13, office of Noval Research. ONR Tash No. 389–150, 117 p. (available from the Documents Clearinghouse, Arlinton. Va., as AD 705625).

MATHER, P.M. (1976), *Computational Methods of Multivariate Analysis in Physical Geography.* London, Wiley & Sons.

MAXWELL, A.E. (1974), *Multivariate Analysis in Behavioural Research.* Monographs on Applied Probalility and Statistics. London, Capman & Hall.

SOKAL, R.R. and MICHENER, C.D. (1958). "A statistical method for evaluating systematic relationships". *University of Kansas Science Bulletin.* num. 7, pags. 1409–38.

THOMAS. G.S.P. (1969). "Rutine sediment analysis– a package of thre programs". In: *The use of computers in geomorphological research,* Symposium held at Nottingham, 1968. Brit. Geomorph. Res. Group. Occas. Paper 6, Geoabstracts, Uni. of East Anglia, Norwich.