ESTUDIO TOPOLÓGICO DE OPTIMIZACIÓN DE LA RED DE CARRETERAS CASTELLANO-LEONESA

Francisco J. Tapiador Fuentes
José L. Casanova Roque
Universidad de Valladolid
Departamento de Física Aplicada I. Laboratorio de Teledetección
Facultad de Ciencias. Tlf.: (983) 42-31-32
Pº Prado de la Magdalena s/n 47071 VA
Correo-e: tapiador@latuv.uva.es

RESUMEN

El objeto de esta ponencia es el estudio de un aspecto inicial del estudio geográfico de una red de carreteras, el de su estructura topológica, utilizando como base empírica el caso de la castellano-leonesa. Para ello, se empieza conceptualizando completamente el objeto de estudio utilizando el lenguaje-marco matemático de la Topología, inscribiendo así por vía formal a la teoría de grafos en la práctica geográfica por medio de la definición de éstos sobre variedades topológicas de dimensión variable. Se pasa después a definir un nuevo índice que aprecia el grado de equilibrio territorial del espacio sobre el que se asientan las carreteras, cuenta con un significado geográfico pleno, es sencillo de aplicar, y posee un coste computacional bajo, para aplicárselo a la red de carreteras de Castilla y León. Por último, se discuten los resultados y se indican las direcciones más adecuadas en las que sería conveniente continuar el estudio global de la red.

1. Introducción

Un primer paso, o un instrumento complementario, del estudio geográfico de una red de carreteras es su estudio topológico. Con él, es posible, a priori, determinar similitudes con otras redes, conocer de manera más o menos precisa su estructura interna, -con los problemas conocidos asociados a cada tipo-, y fijar un punto de apoyo para el modelo que se vaya a construir.

En nuestro caso, el problema a modelizar es la red de carreteras de la Comunidad de Castilla y León, red que presenta unas características particulares. Se trata de una red de gran magnitud, al sobreponerse a la región más grande de Europa, y que posee herencias históricas notables que la condicionan en toda su extensión. A una estructura a primera vista predominantemente radial en su estructura interna, hay que matizar que el carácter no acotado de la Comunidad en cuanto a comunicaciones convierte a la red viaria en una parte de la del Estado, lo que ha de tenerse en cuenta al modelizar su estructura, ya que la parte correspondiente a la RIGE (red de interés general del estado) posee una indudable componente extravertida.

Es necesario señalar aquí que el fin del trabajo es la optimización de la red de carreteras, entendiendo esta operación como aquella que dota al espacio sobre el que se asienta la red de mayor cohesión interna, es decir, de un equilibrio territorial mayor en cuanto al despliegue sobre él de las carreteras, aunque los resultados que vayamos a obtener pueden ser usados también para el estudio del impacto que en este sentido tendría una actuación determinada.

El entronque epistemológico del trabajo es claro: una Geografía que utiliza a la matemática como su lenguaje formal, que evita el discurso, objetiva y en la línea hipotético-deductiva: observación, explicación, compresión y predicción como proceso secuencial y como fines. En este sentido, es imprescindible comenzar situando el problema en esta línea, para lo que un paso necesario es la conceptualización, pocas veces explicitada, de la Geografía como ciencia y de su objeto de estudio.

2. Conceptualización formal previa: El espacio geográfico G_S sobre la variedad topológica T_0

No todos los elementos del medio son igualmente significativos para un estudio concreto del espacio. Se hace pues necesaria una selección inteligente de aquellos que, una vez jerarquizados, actuarán como sujetos pacientes de nuestros postulados, como los elementos que experimentarán los procesos. Así pues, el primer paso es definir los elementos individuales de los que trata la Geografía.

DEFINICIÓN: Sea S un conjunto de puntos elegidos arbitrariamente sobre la Tierra. Sea F_1 una aplicación uno-a-uno que nos asigna biunívocamente a cada punto de S un punto que lleva a su vez asociado un vector n-dimensional cuyas componentes son las características cuantificables de cada punto en un cierto orden, con un número finito $j<n$ de las mismas distinto de cero. Aplicando F_1 a S obtenemos un nuevo conjunto G_S, de puntos, a los que llamaremos 'puntos de G_S', y a los que denotaremos como P_i.

$$F_1:\ S \rightarrow G_S$$
$$s \rightarrow P_i(x_1 \ldots x_n)$$

DEFINICIÓN: A G_S le llamaremos 'Espacio Geográfico'.
El siguiente paso es dotar a la entidad que hemos definido con algunas propiedades interesantes. Para ello, lo conceptualizaremos como un 'espacio topológico', artificio que nos servirá para poder operar numéricamente con los individuos geográficos en un contexto rico en aplicaciones.

PROPOSICIÓN: G_S, junto a $A \subseteq G_S$, (siendo A un conjunto de elementos, llamados abiertos, formados por uniones arbitrarias de discos n-dimensionales), es un espacio topológico. A los abiertos los llamaremos 'unidades mínimas funcionales', y los denotaremos por A_i $i \in I$, I conjunto arbitrario.

Demostración:

Por definición, G_S y A serán un espacio topológico si se satisface que:

1) $\varnothing \in A$; $G_S \in A$

2) Si $\{A_i\}_{i \in I}$ es una familia arbitraria de conjuntos, $A_i \in A \Rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i \in A$

3) Si $n \in N$, y $A_1, \dots, A_n \in A \Rightarrow A_1 \bigcap \dots \bigcap A_n \in A$

Lo que se demuestran sin dificultad para G_S.

Anotar que, tal y como lo hemos definido, el objeto de estudio de la Geografía es (y ha sido) el espacio geográfico G_S en toda su extensión.
Es conveniente señalar aquí algunas de las propiedades con las que cuenta G_S, aunque nuestro problema actual se resuelva en otro sentido:

PROPOSICIÓN: G_S es conexo, conexo por caminos, métrico con la distancia euclídea usual, de Hausdorff , casi compacto y compacto.

Demostración:

- G_S es conexo si no se puede poner como unión de dos subconjuntos abiertos disjuntos no vacíos, lo cual es inmediato.
- Si un espacio topológico es conexo, se demuestra que es conexo por caminos.
- G_S es métrico con una distancia d_2: $G_S \times G_S \rightarrow R$ definida así:

  Si $P:(a_1,\dots a_n)$, $Q:(b_1,\dots,b_n) \in G_S$, $d_2(P,Q) = \left(\sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i)^2 \right)^{1/2}$

  Es trivial demostrar que d_2 es una distancia. Así pues, como $G_S \neq \varnothing$, G_S y d_2 constituyen por definición un espacio métrico.

- Todo espacio métrico es de Hausdorff, luego G_S lo será.
- G_S es casi compacto, pues para todo $G_S = \bigcup_{i \in I} A_i$ recubrimiento por abiertos de G_S, $\exists$ $F \subset I$, F finito, tal que $G_S = \bigcup_{i \in F} A_i$.
- Y por último, es compacto, al ser casi compacto y de Hausdorff.

Estas propiedades son útiles para un cierto tipo de problemas geográficos, y se citan aquí sólo a modo de ejemplo de las posibilidades que sugiere la conceptualización como espacio topológico; sin embargo, en lo referente al problema actual, la manera más sencilla (y obvia) de tratarlo es mediante grafos. Pero para modelizarlo de este modo de un manera formalmente bien asentada, es necesario plantear algunas cuestiones previas:

PROPOSICIÓN: Podemos considerar a G_S alternativamente como:

- Una variedad topológica orientable de dimensión n (sea aquí n= 2).
- Una variedad topológica no orientable de dimensión n (sea aquí n=2).

Demostración:

Es inmediato ver que todo punto P_i de G_S, tal y como hemos construído G_S, posee un entorno abierto homeomorfo a un abierto de R^2, por lo que G_S es una variedad topológica de dimensión 2, sea ésta orientable o no.

Para otros problemas, se demuestra análogamente que G_S es también homeomorfo a una variedad topológica de dimensión n.

DEFINICIÓN: Dado G_S variedad topológica de dimensión 2, entendemos por arco continuo sobre G_S a una aplicación inyectiva y continua γ: $[0,1] \rightarrow G_S$, con el intervalo [0,1] dotado de la topología usual. Im(γ) puede visualizarse como un segmento (al que llamaremos arista) en G_S.

- A los puntos $x_0 = \gamma(0)$ y $x_1 = \gamma(1)$ se les llama extremos de la arista.
- Llamaremos grafo representado en G_S a un conjunto finito de aristas tales que 2 cualesquiera de ellas intersecan en 0, 1 ó 2 extremos de ambas.
- Llamaremos cara del grafo a una componente conexa del complemento de la unión de las aristas.
- Llamaremos nodo a un extremo de alguna arista.

Ya tenemos bien definido lo que es un grafo. Podríamos haber llegado a su definición sin pasar por las variedades topológicas, diciendo que un grafo es un conjunto finito no vacío Y de 'a' puntos junto a otro conjunto definido X de 'b' pares no ordenados de distintos puntos de Y. Pero desde el punto de vista formal, es conveniente conceptualizar a los grafos de esta manera.

Con la base empírica que tenemos, tanto por simplicidad como por la naturaleza del problema, utilizaremos la esfera topológica como variedad topológica sobre la que definir los grafos.

DEFINICIÓN-PROPOSICIÓN: Para el caso que nos ocupa, se puede suponer sin pérdida de generalidad que G_S es homeomorfo a una variedad topológica orientable de dimensión dos T_0 (la esfera como subespacio de R^3)

La demostración es trivial.

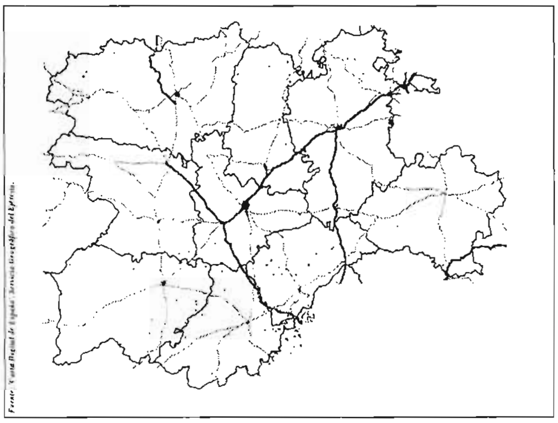
COROLARIO: G_S es entonces orientable.

La demostración es inmediata.

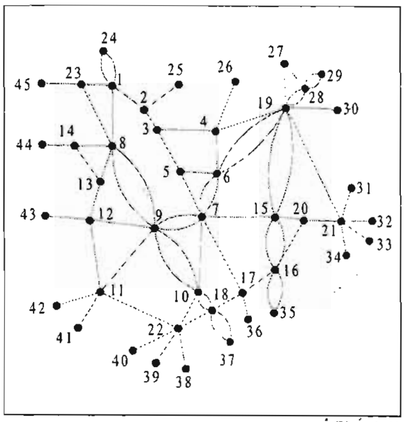
Téngase en cuenta que en problemas que requieran conservación de campos vectoriales, la orientabilidad de la variedad topológica es del todo necesaria, y nótese también que si el espacio S se considera como tridimensional, no hay dificultad alguna en tomar a G_S como un *threefold*. En nuestro problema no es imprescindible esta precaución.

3 Modelización de la red de carreteras como (multi)grafo

La forma de transformar una red de carreteras en un grafo no es un proceso trivial. Diversos autores han utilizados diferentes técnicas, desde simplificar notablemente el trazado -sin duda por problemas de capacidad de cálculo-, hasta definir de manera arbitraria el grafo -lo cual no tiene por qué ser necesariamente un error siempre que se establezca una manera unívoca de hacerlo-. Una dirección, seguida por muchos, es realizar un estudio a priori de las relaciones funcionales que existen en la red, para luego definir las aristas en función de ellas. Otra, la que vamos a seguir, es realizar un proceso de abstracción tomando únicamente como referencia lo físico y cuantificable con precisión, es decir, *copiar* la red tal y como se aprecia en el plano en una estructura de nodos y aristas, con lo que el grafo que nos resulte va a tener unas características dadas ya desde el principio (por ejemplo, que



La red objeto de estudio



El grafo N

es altamente improbable que dos nodos extremos -en terminología geométrica- establezcan una arista.).

Definiremos el (multi)grafo asociado a nuestra red de carreteras según el proceso formal anteriormente descrito -que ahora vamos a obviar; sólo añadamos que lo hacemos sobre T_0- teniendo en cuenta que nuestros elementos van a ser las carreteras de primer y segundo orden (siendo innecesariamente ortodoxos, puede decirse que la componente k-ésima del vector asociado a cada punto -tramo de carretera aquí- es la clasificación administrativa de la misma, por lo que no hay contradicción con los términos de arriba) y las intersecciones que se producen entre ellas sobre el plano. Asimismo, tomaremos un entorno (disco) de radio ε arbitrario para evitar la multiplicación de entidades, entendiendo por intersección de vías la aproximación de tramos a distancia menor o igual a ε -distancia euclídea, sobre el plano-.

No es necesario extenderse más en esta operación: viendo el plano adjunto y el correspondiente grafo resultante se aprecia sin dificultad la operación que realizamos para obtener el grafo que modeliza a un nivel básico la red de carreteras castellano-leonesa.

Asimismo, definiremos unívocamente la matriz de adyacencia del grafo. Si el tramo i,j pertenece a la red secundaria, en la matriz de adyacencia usual le corresponderá un uno; si a la primaria, un dos, y cero si no hay arista, ordenando los nodos en su orden numérico en la matriz.

La matriz, de 45x45, queda así:

```
010000010000000000000012000000000000000000000
101000000000000000000000100000000000000000000
010110000000000000000000000000000000000000000
001001000000000000010000010000000000000000000
001001100000000000000000000000000000000000000
000110200000000000020000000000000000000000000
000012002100001010000000000000000000000000000
100000002000110000000010000000000000000000000
000000220211000000000000000000000000000000000
000000102000000002000100000000000000000000000
000000001001000000000100000000000000000011000
000000001010100000000000000000000000000000100
000000010001010000000000000000000000000000000
000000010000100000000000000000000000000000010
000000100000000200210000000000000000000000000
000000000000002010010000000000000020000000000
000000100000000101000000000000000001000000000
000000000200000010000100000000000000200000000
000102000000002000001000001201000000000000000
000000000000001100001000000000000000000000000
000000000000000000110000000000111100000000000
000000000110000001000000000000000000011100000
100000010000000000000000000000000000000000001
200000000000000000000000000000000000000000000
010000000000000000000000000000000000000000000
000100000000000000000000000000000000000000000
000000000000000000100000000100000000000000000
000000000000000000200000001010000000000000000
000000000000000000000000000100000000000000000
000000000000000000100000000000000000000000000
000000000000000000001000000000000000000000000
000000000000000000001000000000000000000000000
000000000000000000001000000000000000000000000
000000000000000000001000000000000000000000000
000000000000000200000000000000000000000000000
000000000000000010000000000000000000000000000
000000000000000002000000000000000000000000000
000000000000000000000100000000000000000000000
000000000000000000000100000000000000000000000
000000000000000000000100000000000000000000000
000000000010000000000000000000000000000000000
000000000010000000000000000000000000000000000
000000000001000000000000000000000000000000000
000000000000010000000000000000000000000000000
000000000000000000000010000000000000000000000
```

4 Estudio del grafo N mediante el índice de equilibrio viario Θ

Una vez modelizada la red de carreteras como un grafo, puede empezarse su estudio. Para ello, definiremos un índice (topológico, i.e., sólo tiene en cuenta la estructura de la red, no su geometría) dotado de pleno significado geográfico, fácil de calcular y que, aparte de estar bien definido formalmente, es general -se define para cualquier grafo- y mejora notablemente el estudio de los problemas asociados a las redes con los índices de Kansky, Prihar, Zagozdzon y los de cohesión.

DEFINICIÓN: Llamaremos índice Θ (de equilibrio viario) sobre un grafo N a:

$$\Theta = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(d(i)\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} d(j)_{\,|\exists \overline{ij}} \right)}{n(n-1)^3 m^2}$$

donde d(i) es el grado del nodo i, d(j) el grado de los nodos conectados por al menos una arista a i, n el número de nodos, y m la multiciplidad máxima de las aristas del grafo. (N.B.: nótese la restricción de la segunda suma a la existencia de la arista ij).

DEFINICIÓN: Una red (aquí de carreteras) es 'más eficaz en cuanto a la articulación global que proporciona al territorio sobre el que se asienta' cuanto mayor sea el índice Θ sobre un grafo correspondiente a esa red.

COROLARIO: Dos redes (aquí de carreteras) son equivalentes en cuanto a la articulación global que proporcionan si sus índices de equilibrio viario Θ son iguales.

COROLARIO: La articulación global que proporciona una red a un territorio es independiente de las dimensiones de la misma.

¿Cuál es el significado geográfico del índice Θ? Como se puede apreciar por su construcción

$$\Theta = F\,(n, d(i), d(j) \text{ si } i\Re j, m)$$

El valor principal del índice es que tiene en cuenta no sólo el grado de cada nodo, lo cual es lógico en cuanto a la articulación que éste proporciona, sino el grado de aquellos nodos

conexos al dado. Es decir, el índice es mayor no sólo cuanto más bien conectado esté un nodo, sino también cuanto mejor relacionado esté con nodos bien conectados. Así, el índice valora positivamente lo que podemos llamar 'buena accesibilidad', es decir, la posibilidad que se tiene desde un nodo de, o bien acceder a muchos otros nodos, o de acceder en primera instancia a otro nodo que esté conectados a muchos nodos.
Pero no sólo eso, sino que por su misma construcción el índice discrimina la relación que existe entre aquellos nodos inconexos o poco conectados y los que lo están bien, acercándose a la unidad -como buen índice varía entre 0 y 1, y está definido para cualquier grafo, sea inconexo, múltiple, planar o no- en el caso de que exista un equilibrio entre las diferentes conectividades de los nodos. No tenemos espacio para un estudio detallado de Θ, sólo señalar que en el caso de que existieran aristas múltiples, lo que puede entenderse tanto desde una multiciplidad de accesos como desde la asignación de pesos cualitativos a las aristas, el índice potencia primero la interconexión simple entre todos los nodos -una red está desequilibrada si un nodo está inaccesible o lo está poco, mientras que otros están bien conectados- para pasar después, una vez que se ha logrado el grafo total K_n con un m determinado (Θ=1, equilibrio), a considerar como positiva cada nueva arista.

Como puede intuirse, el denominador sirve para normalizar el valor del numerador, siendo pues el valor máximo posible para n nodos y multiplicidad máxima m -la demostración no es trivial pero no la incluímos por falta de espacio-, valor éste que para redes de carreteras de cierta complejidad es difícil de alcanzar (por lo que el índice tendrá valores muy pequeños, sin que esto sea un problema: simplemente hay que considerar varios órdenes de magnitud), aunque para otro tipo de redes geográficas presenta un comportamiento menos acotado. Esta normalización nos permite comparar redes de distinto tamaño -si quisiéramos tener en cuenta el factor tamaño, basta con obviar el denominador-, aunque para el problema que tenemos planteado la utilización del mismo es diferente.

En nuestro caso, lo que es necesario calcular es la diferencia entre el valor del índice Θ para el grafo N, es decir, para la red de carreteras en su estado actual, y los correspondientes para los grafos N_m, o sea, el grafo N con las m modificaciones que estimemos. Así, el valor máximo de esas diferencias, $\max(\Delta\Theta) = \max\ (\Theta_N - \Theta_m)$, nos dará la modificación que optimiza el trazado actual en el sentido de equilibrio viario, como decíamos. Formalmente:

PROPOSICIÓN: Una arista definida sobre el grafo N proporciona una mayor eficacia cuanto mayor sea el $\Delta\Theta$ que produce su inclusión.

Esta proposición se sustenta, aparte de la propia lógica interna del desarrollo que estamos haciendo, lo que sería suficiente, en la observación de la realidad: una red sesgada hacia una dirección crea deseconomías. Así, no es tan importante para lo que se viene llamado articulación global el que un área obtenga mayores beneficios con una determinada configuración viaria en un sector, como el que el conjunto considerado pueda experimentar un desarrollo armónico, sin tensiones locales, y esto es precisamente lo que mide nuestro índice.

La fórmula que hemos dado para Θ es engorrosa de manejar. Realizando unas cuantas operaciones algebraicas, se llega a una expresión equivalente que utiliza la matriz de adyacencia del (multi)grafo, y que presenta dos ventajas: la primera, es que es fácilmente computable: es muy sencillo realizar un programa que opere con matrices, o utilizar uno de los paquetes informáticos al uso. La segunda, que también es un punto a favor del índice Θ, es que el gasto computacional es muy bajo, pues sólo se realizan operaciones sencillas con las matrices. No hay inversiones, ni una complicada búsqueda de subgrafos -subgrafos que por otra parte tienen un discutible significado geográfico-, ni se mezclan distribuciones estadísticas.

Para operar con comodidad, es necesario definir una matriz auxiliar sobre el grafo N.

DEFINICIÓN: Llamaremos matriz booleana auxiliar sobre la matriz de adyacencia nxn M del grafo N, y denotaremos por J, a aquella matriz nxn construída así:

- Si (i,j) de M = 0 $\Rightarrow$ (i,j) de J = 0 con i,j $\leq$ n
- (i,j) de J =1 en cualquier otro caso.

PROPOSICIÓN: El índice Θ puede escribirse como:

$$\Theta = \frac{(1,1,\ldots,1) \otimes M \otimes J \otimes M \otimes (1,1,\ldots,1)'}{n(n-1)^3 m^2}$$

donde M es la matriz de adyacencia, J la booleana asociada a ésta, ⊗ el producto de matrices usual en el orden descrito, n el número de nodos y m el número máximo de multiciplidades de aristas.

Fórmula que simplifica notablemente los cálculos y que no demostraremos por falta de espacio.

5 Aplicación de Θ a la red de carreteras de Castilla y León

El grafo N que nos había resultado del proceso anteriormente descrito (vs. *supra*; las aristas rojas se corresponden con doble arista) queda definido unívocamente por su matriz de simétrica de adyacencia M(N) en la que se ordenan los A_i en cada fila y en cada columna según su orden, y cuyo Θ –teniendo en cuenta que a m se la ha de dar el valor 2- resulta ser de 0.000175306.

Para saber qué actuaciones mejorarían la red, en el sentido -insistimos- de mayor equilibrio, es necesario, en primer lugar, elegir los tramos a construir -paso del cero al uno en la matriz de adyacencia- o que mejorar -paso de uno al dos-, y hacer esto con la lógica de su factibilidad real. Entonces, basta con calcular el índice Θ para el grafo N y para cada uno de los que resultan con cada actuación.

En nuestro caso, se han elegido las actuaciones que se detallan en la tabla adjunta, con los resultados que se señalan (se han multiplicado los valores por 10^5 para mejorar la lectura):

ARISTA	3-8	5-8	6-15	6-15	44-45	19-21	1-8	5-9	5-9
Cambio	de 2ª	de 2ª	a 1ª	de 2ª	de 2ª	de 2ª a 1ª	de 2ª a 1ª	de 2ª	de 2ª a 1ª
$10^5\Theta$	18.3132	18.4046	19.7220	18.8480	17.6611	18.1437	18.0132	18.6002	19.3828
$10^5\Delta\Theta$	0.7826	0.8740	2.1914	1.3174	0.1305	0.6131	0.4826	1.0696	1.8522

6 Conclusiones

Como conclusión sobre el problema objeto de estudio, parece que de las actuaciones planteadas, la 6-15 y 5-9 mejoran la estructura de la red, lo cual no sólo no era obvio de un primer vistazo, sino que de serlo, no podía ser justificado convenientemente.

Es evidente que el proceso que hemos realizado no es más que un primer paso tanto en el estudio topológico de la red de carreteras como, por supuesto, en el estudio geográfico completo. Sin embargo, parece que la conducta apropiada para abordar el problema es la descrita.

Asimismo, un estudio detallado del índice Θ mostrará su potencia, su significado geográfico, y la posibilidad de aplicarlo, con pautas cualesquiera de elección del grafo, a cualquier red.

Por último, añadir que una profundización en el estudio de la red castellano-leonesa según la técnica descrita iría en dos direcciones principales: por un lado, corregir el índice asignando pesos relativos a los nodos de la red, y por otro, tener en cuenta las distancias internodales, es decir, pasar del estudio topológico al geométrico, sin que esto signifique que las conclusiones que hemos obtenido puedan ser elididas: el desarrollo posterior afinará el modelo, pero no invalidará los resultados, ya que el equilibrio de la red que hemos conceptualizado y medido es una componente básica de la misma, y el equilibrio territorial que se deduce inmediatamente de él un factor clave en la planificación territorial.

Otra cosa es el cómo se utilice el índice: su cálculo y definición son objetivos, pero la aplicación que se puede dar, en absoluto. Pero tal vez no sea tarea del geógrafo entrar en ello.

Bibliografía

HARARY, Frank. *Graph Theory.* Addison-Wesley 1969
TAYLOR, Zbigniew & POTRYKOWSKI, Marek. *Geografía del Transporte.* Ariel 1984
BERGE, Claude. *Théorie des graphes et ses applications.* Dunot 1963
BERGE, Claude. *Hipergraphes.* Gauthier-Villars 1987
VV.AA. *Métodos cuantitativos en Geografía: enseñanza, investigación y planeamiento.* AGE 1986